پاسخ‌های روز دوم مرحله‌ی دوم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر ایران

زابونیان در دریای مدیترانه .... ۲۰ امتیاز

ثابت می‌کنیم پاسخ برابر $۴۶۶ = \frac{۱۳۹۸}{۳}$ است.

ابتدا ثابت می‌کنیم امکان ندارد بیش از ۴۶۶ نفر زنده بمانند. فرض کنید فرد A زنده بماند و نام افراد B و C را روی کاغذش نوشته باشد. A رسواگر نیست، زیرا زنده می‌ماند. بنابراین فرد دیگری به جز A نام B یا C را روی کاغذش نمی‌نویسد؛ یعنی B و C سربه‌زیر هستند و کشته می‌شوند. پس به ازای هر فرد که زنده می‌ماند، دو فرد متناظر وجود دارد که می‌میرند (و این دو فرد به فرد زنده‌ی دیگری متناظر نمی‌شوند). بنابراین حداکثر $\frac{۱}{۳}$ افراد زنده می‌مانند.

اکنون حالتی ارائه می‌دهیم که در آن ۴۶۶ نفر زنده بمانند. افراد را به دسته‌های شش‌تایی تقسیم کرده و افراد هر دسته را با $X_۱$ تا $X_۶$ نام‌گذاری می‌کنیم. نوشته‌های افراد را به صورت زیر در نظر بگیرید:

- $X_۱$ نام $X_۳$ و $X_۴$ را بنویسد.
- $X_۲$ نام $X_۵$ و $X_۶$ را بنویسد.
- هر کدام از $X_۳$ تا $X_۶$ نام $X_۱$ و $X_۲$ را بنویسند.

به این ترتیب، افراد $X_۱$ و $X_۲$ زنده می‌مانند و بقیه می‌میرند. پس در این روش از هر شش نفر، دو نفر زنده می‌مانند (در کل $۴۶۶ = ۲ \times \frac{۱۳۹۸}{۶}$ نفر).

دیرالسلطان .... ۲۰ امتیاز

ثابت می‌کنیم پاسخ برابر $۴۱۹۴ = ۱۳۹۸ \times ۳$ است.

ابتدا روشی برای سلطان ارائه می‌کنیم که مستقل از نحوه‌ی بازی ایلیچ، بتواند دست کم ۴۱۹۴ واحد پول بگیرد. قطاع‌ها را به ترتیب با ۱ تا ۱۳۹۸ شماره‌گذاری می‌کنیم. سلطان در مراحل زوج، قطاع‌های زوج و در مراحل فرد، قطاع‌های فرد را انتخاب کند. مستقل از نحوه‌ی بازی ایلیچ، در پایان بازی هر قطاع با شماره‌ی زوج، به طور کامل آبی و هر قطاع با شماره‌ی فرد، به طور کامل قرمز خواهد شد و ایلیچ ۱۳۹۸×۳ واحد پول خواهد داد.

حال روشی برای ایلیچ ارائه می‌کنیم که مستقل از حریف، حداکثر ۴۱۹۴ واحد پول بدهد. ایلیچ در مراحل زوج، نزدیک‌ترین خانه‌ی ممکن به مرکز دایره و در مراحل فرد، دورترین خانه‌ی ممکن به مرکز دایره را انتخاب کند. فرض کنید C یک قطاع دل‌خواه و D قطاع بعدی آن در جهت ساعت‌گرد باشد. پس از بازی، مقادیر زیر را در نظر بگیرید:

- $f(C)$: تعداد زوج خانه‌های مجاور ناهم‌رنگ که هر دو خانه در C هستند.
- $g(C)$: تعداد زوج خانه‌های مجاور ناهم‌رنگ که یکی در C و دیگری در D است.

با استراتژی به کار گرفته شده توسط ایلیچ، در هر قطاع با حرکت از مرکز به سمت محیط، ابتدا خانه‌های آبی و سپس خانه‌های قرمز دیده خواهند شد. پس $f(C) \leq ۱$ است. هم‌چنین $g(C) \leq ۳$ خواهد بود، زیرا C سه قطاع دارد.
ثابت می‌کنیم $f(C) + g(C) \leq ۳$. دو حالت داریم:

- قطاع C تک‌رنگ باشد. در این صورت مقدار $f(C)$ برابر صفر است. پس:

$$f(C) + g(C) \leq ۰ + ۳ = ۳$$

- دو خانه از قطاع C به یک رنگ و دیگری به رنگ دیگر باشد. در این صورت $f(C) = ۱$ است. از برهان خلف استفاده می‌کنیم؛ فرض کنید $f(C) + g(C) > ۳$ باشد. از آن‌جایی که $g(C) \leq ۳$، پس $g(C)$ برابر سه است. پس تمام خانه‌های قطاع D با خانه‌ی متناظر خود در C ناهم‌رنگ هستند. بنابراین در D خانه‌ای آبی وجود دارد که نسبت به یک خانه‌ی قرمز در D دورتر از مرکز است. تناقض حاصل حکم را ثابت می‌کند.

حال اگر مقدار $f(C) + g(C)$ را به ازای تمام قطاع‌ها جمع کنیم، هر زوج مجاور ناهم‌رنگ را یک بار شمرده‌ایم. پس ایلیچ حداکثر ۱۳۹۸×۳ واحد پول خواهد داد.

زبان چرخشی .... ۲۰ امتیاز

آ) برنامه‌ی زیر، دو زیربرنامه دارد. در زیربرنامه‌ی C_1 تا زمانی که مقدار متغیر ۱ برابر صفر نیست، یک واحد از آن کم شده و به متغیر ۳ اضافه می‌شود. سپس به زیربرنامه‌ی C_2 رفته و همین کار با متغیر ۲ انجام می‌شود. به این ترتیب مقدار $A+B$ در متغیر ۳ ریخته خواهد شد.

subprogram C_1:

1) NXT
2) JMP
3) JMP
4) DEC
5) JMP
6) INC

subprogram C_2:

1) JMP
2) EXT
3) JMP
4) JMP
5) DEC
6) INC

ب) برنامه‌ی زیر، سه زیربرنامه دارد. در زیربرنامه‌ی C_1 تا زمانی که مقدار هیچ کدام از دو متغیر ۱ و ۲ برابر صفر نیست، یک واحد از هر کدام کم شده و به متغیر ۳ اضافه می‌شود. با این کار، $min(A,B)$ در متغیر ۳ ریخته می‌شود. حال مقدار یکی از متغیرهای ۱ و ۲ برابر صفر و مقدار دیگری برابر $|A-B|$ است. کافی است در زیربرنامه‌های C_2 و C_3 مقادیر باقی‌مانده‌ی متغیرهای ۱ و ۲ را در متغیر ۳ بریزیم (مانند قسمت آ):

subprogram C_1:

1) NXT
2) NXT
3) JMP
4) DEC
5) DEC
6) INC

subprogram C_2:

1) NXT
2) JMP
3) JMP
4) DEC
5) JMP
6) INC

subprogram C_3:

1) JMP
2) EXT
3) JMP
4) JMP
5) DEC
6) INC

ج) ایده‌ی کلی، استفاده از الگوریتم نردبانی و استفاده از این ویژگی است که:

$$(p,q) = (p-q,q)$$

در زیربرنامه‌ی $C_۱$ مقدار متغیر ۲ در متغیر ۳ ریخته می‌شود. اگر مقدار متغیر ۱ برابر صفر باشد کار تمام است، زیرا $(۰,B) = B$. پس در زیربرنامه‌ی $C_۲$ اگر مقدار متغیر ۱ برابر صفر باشد، اجرای برنامه را به پایان می‌رسانیم. در زیربرنامه‌ی $C_۳$ هر مرحله از متغیرهای ۱ و ۳ یک واحد کم شده و به متغیر ۲ اضافه می‌شود (این کار را تا زمانی انجام می‌دهیم که مقدار دست کم یکی از متغیرهای ۱ و ۳ برابر صفر شود). حال مقدار متغیر یکی از متغیرهای ۱ و ۳ برابر $|A-B|$ و مقدار متغیر ۲ برابر $min(A,B)$ است. کافی است مقدار متغیر ۳ را به متغیر ۱ اضافه کرده (در زیربرنامه‌ی $C_۴$) و کار را از ابتدا با اعداد $|A-B|$ و $min(A,B)$ انجام دهیم.

subprogram C_1:

1) JMP
2) NXT
3) JMP
4) JMP
5) DEC
6) INC

subprogram C_2:

1) EXT
2) NXT

subprogram C_3:

1) NXT
2) JMP
3) NXT

4) DEC
5) INC
6) DEC

subprogram C_4:

1) JMP
2) JMP
3) NXT
4) INC
5) JMP
6) DEC

د) ایده‌ی کلی، استفاده از عبارت زیر است:

$$۱ + ۳ + ۵ + \ldots + (۲n - ۱) = n^۲$$

هر مرحله اگر مقدار متغیر ۱ برابر k باشد، $۲k - ۱$ را به متغیر ۳ اضافه می‌کنیم و سپس یک واحد از متغیر ۱ کم می‌کنیم تا زمانی که صفر شود.

به طور دقیق‌تر، ابتدا چک می‌کنیم که مقدار متغیر ۱ صفر نباشد (در غیر این صورت اجرای برنامه را پایان می‌دهیم). سپس مقدار متغیر ۱ (برای مثال k) را در متغیر ۲ می‌ریزیم و با استفاده از آن مقدار $k - ۱$ را به متغیر ۱ و $۲k - ۱$ را به متغیر ۳ اضافه می‌کنیم.

subprogram C_1:

1) EXT
2) NXT

subprogram C_2:

1) NXT
2) JMP
3) JMP
4) DEC
5) INC
6) JMP

subprogram C_3:

1) JMP
2) NXT
3) JMP
4) INC
5) DEC
6) INC
7) JMP
8) JMP
9) INC

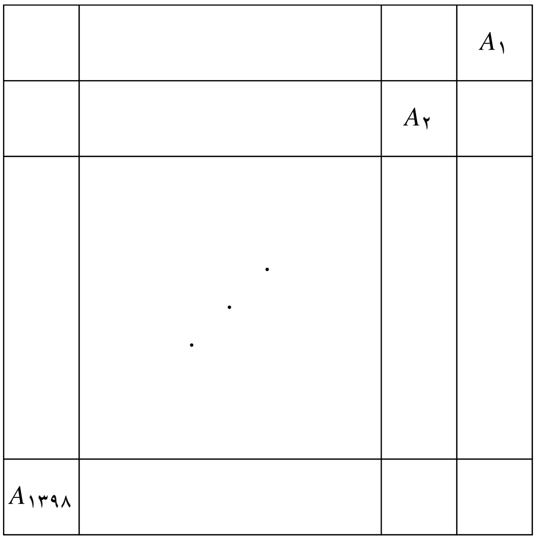
subprogram C_4:

1) DEC
2) JMP
3) DEC
4) JMP
5) NXT

باغچه‌ی آفت‌زده‌ی آبولف .... ۲۰ امتیاز

ثابت می‌کنیم پاسخ برابر $۶۹۹ = \frac{۱۳۹۸}{۲}$ است.

ابتدا روشی برای سلطان ارائه می‌کنیم که در پایان، حداکثر ۶۹۹ آفت در باغچه وجود داشته باشد. فرض کنید سطرها از بالا به پایین و ستون‌ها از چپ به راست شماره‌گذاری شده باشند. به قطری که خانه‌ی (۱۳۹۸, ۱) تا خانه‌ی (۱, ۱۳۹۸) را در بر می‌گیرد، قطر **آبولفی** می‌گوییم که در شکل زیر، خانه‌های آن با $A_۱$ تا $A_{۱۳۹۸}$ مشخص شده‌اند:



خانه‌های زیر قطر اصلی (که در ابتدا آفت دارند) را به صورت قطری لایه‌بندی می‌کنیم. برای مثال، این لایه‌بندی برای یک جدول ۶×۶ در شکل زیر مشخص است (خانه‌های با شماره‌ی i متعلق به لایه‌ی شماره‌ی i هستند):

۱					
۲	۱				
۳	۲	۱			
۴	۳	۲	۱		
۵	۴	۳	۲	۱	

به ازای هر $۱ \leq i \leq ۱۳۹۸$، سلطان در مرحله‌ی i ام خانه‌های لایه‌ی i به همراه خانه‌های $A_۱$ تا A_i از قطر آبولفی را انتخاب کند. با این روش در انتهای کار، هیچ آفتی خارج از قطر آبولفی وجود نخواهد داشت. حال اگر تعداد آفت‌های روی قطر آبولفی از ۶۹۹ بیش‌تر بود، یک بار تمام خانه‌های قطر آبولفی را انتخاب کرده و دگرگون می‌کنیم. با روش گفته شده حداکثر ۶۹۹ آفت در باغچه خواهیم داشت.

حال ثابت می‌کنیم در هر لحظه حداقل ۶۹۹ آفت در جدول وجود دارد. به یک سطر، **فرد** گوییم، اگر تعدادی فردی آفت داشته باشد؛ به همین ترتیب سطر **زوج** را تعریف می‌کنیم. در هر مرحله سطرهای زوج، فرد می‌شوند و بالعکس (زیرا از هر سطر دقیقاً یک خانه تغییر وضعیت می‌دهد). در ابتدا ۶۹۹ سطر فرد و ۶۹۹ سطر زوج داریم. پس هم‌واره ۶۹۹ سطر فرد خواهیم داشت که هر کدام دست کم یک آفت دارند.